

Capítulo 11

Corriente Alterna

11.1.	<u>Introducción</u>	11-2
11.2.	<u>Respuesta de resistencias, capacitores e inductancias a la corriente alterna</u>	11-2
11.2.1.	La respuesta de una resistencia	11-2
11.2.2.	La respuesta de un capacitor	11-4
11.2.3.	La respuesta de un inductor	11-6
11.2.4.	Combinando elementos	11-7
11.3.	<u>La notación compleja</u>	11-11
11.4.	<u>Venciendo en el campo complejo</u>	11-17
11.5.	<u>La respuesta en frecuencia</u>	11-22
11.6.	<u>Calculando la potencia</u>	11-25
11.7.	<u>La potencia en el circuito RLC serie</u>	11-28
11.8.	<u>Ejemplos más elaborados</u>	11-30
11.8.1.	El fantasma del circuito paralelo	11-30
11.8.2.	Acoplamiento magnético. El transformador	11-31

11.1. Introducción

Cuando estudiamos distintos ejemplos asociados con la ley de Faraday en uno de ellos tratamos el generador de corriente alterna, basado en la rotación relativa entre un campo magnético de módulo constante y un conjunto de espiras. Dicho generador está caracterizado por una fuerza electromotriz: $V_g(t) = V_0 \cos(\omega t)$. El subíndice “g” es por la palabra “generador”. Para cumplir con la norma deberíamos escribir $v_g(t)$ y no $V_g(t)$ porque las variables dependientes del tiempo son escritas, por convención, en minúsculas. Haremos una excepción porque las mayúsculas son más fáciles de seguir y no entraremos en contradicciones importantes. La elección de la dependencia funcional con el coseno es arbitraria, podríamos haber tomado seno igualmente porque es sólo un cambio en la elección del momento $t=0$. La pulsación ω está conectada con la frecuencia f por: $\omega = 2\pi f$. A nivel mundial, en lo que hace a la distribución domiciliaria o fabril, hay dos valores de frecuencia empleados: $f = 50$ Hz para Europa y los países que compraron a firmas europeas su equipamiento (Argentina, Uruguay, Chile, Perú,...); $f = 60$ Hz para la esfera de influencia de los Estados Unidos (Canadá, México, Brasil,...) En el apéndice damos una breve reseña histórica sobre lo que se llamó “La guerra de las corrientes” que tuvo lugar hacia fines de los 1800.

11.2. Respuesta de resistencias, capacitores e inductancias a la corriente alterna

11.2.1. La respuesta de una resistencia

La experiencia muestra que la ley de Ohm, encontrada originalmente para corrientes y diferencias de potencial continuas, es válida para excitaciones variables en el tiempo. La siguiente gráfica muestra una resistencia conectado a un generador de alterna. El ícono del mismo es una circunferencia con un arco de seno dentro de la misma. La gráfica contiene dos convenciones que utilizaremos en todo este capítulo. Dado que la polaridad del generador varía durante cada período es imposible asignar un borne + (más) y uno – (menos); lo mismo sucede con el sentido de la corriente. Para arreglar este problema pensamos que tomamos una “fotografía” cuando el borne superior del generador es positivo respecto del inferior.

Esto se indica con la flecha vertical que está a la izquierda del ícono del generador. En esta circunstancia la corriente circula en la dirección indicada.

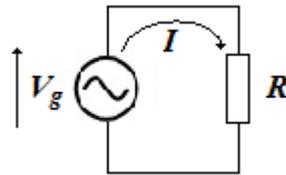


Figura 1. Resistencia conectada a un generador de alterna

En base a lo dicho calculamos la corriente que circula por la resistencia y la potencia disipada en la misma.

$$I_R(t) = \frac{V_g(t)}{R} = \frac{V_0}{R} \cos(\omega t) = I_0 \cos(\omega t) \quad (1)$$

$$P_R(t) = V_g(t) I_R(t) = \frac{V_0^2}{R} \cos^2(\omega t)$$

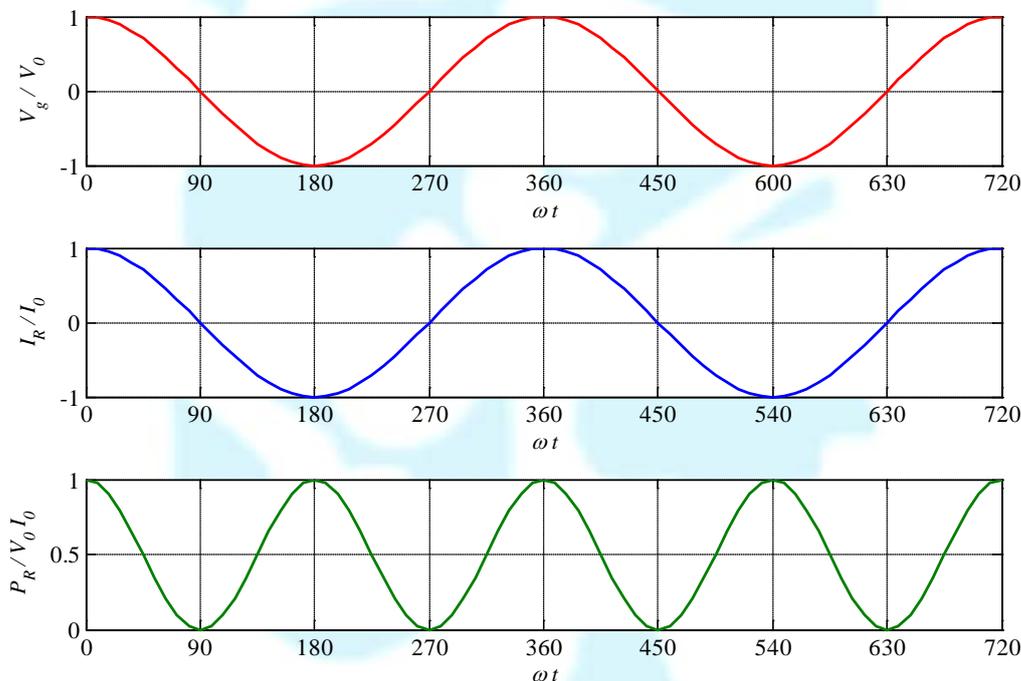


Figura 2. Tensión del generador (rojo), corriente en la resistencia (azul) y potencia entregada por el generador (verde) versus ωt . Los valores están normalizados.

Graficamos dos ciclos (con uno habría bastado) y la variable independiente ωt la expresamos en grados sexagesimales porque no se venden transportadores graduados en radianes (y los ingenieros no los entendemos de todas formas).

Como primer análisis notamos que podemos superponer directamente la curva roja (tensión) con la azul (corriente), punto a punto coinciden. Decimos que la tensión aplicada (roja) y la corriente (azul) se encuentran en fase.

La curva de potencia disipada muestra que, a diferencia de lo que ocurre en corriente continua, la potencia entregada a la resistencia no es constante en el tiempo. Surge entonces la

pregunta: ¿Qué valor de potencia es razonable reportar? Ciertamente no el máximo (demasiado optimista) ni tampoco el mínimo (demasiado pesimista). Se conviene en reportar el valor medio de la misma calculado en un período. Integramos en un período porque incluir más no cambia el resultado.

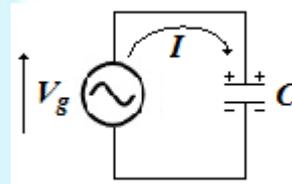
$$P_{media} = \frac{1}{T} \int_0^T P_R(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{V_0^2}{R} \cos^2(\omega t) dt = \frac{V_0^2}{2R} = \left(\frac{V_0}{\sqrt{2}} \right)^2 \frac{1}{R} \quad (2)$$

El último paso de factorado parece caprichoso pero tiene un significado importante. Si la resistencia R fuera conectada a una hipotética pila de valor $V_0/\sqrt{2}$ obtendríamos la misma potencia media disipada que cuando la conectamos al generador de alterna. Para ser más específicos: la bombita iluminaría igual y la plancha calentaría igual. Entonces la cantidad $V_0/\sqrt{2}$ refleja lo que llamamos el *valor eficaz* de la tensión del generador. Cuando decimos que la red domiciliaria en la Argentina es de 220 V, éstos son eficaces. La amplitud V_0 es denominada valor pico. En nuestro país $V_0 = 311$ V. Casi **TODAS** las preguntas importantes que nos haremos se responden en valores eficaces. En este apunte iremos migrando, lentamente, de los valores pico a los eficaces.

11.2.2. La respuesta de un capacitor

La capacidad C , como factor de proporcionalidad entre la carga almacenada y la diferencia de potencial entre las placas del capacitor también es válida para cantidades variables en el tiempo: $Q(t) = C V(t)$. En la figura 3 conectamos el capacitor al generador de alterna y computamos la corriente que circula.

Figura 3. Capacitor conectado a un generador de alterna. Notar convención de signos.



$$V_g(t) - Q(t)/C = 0; I_C = dQ(t)/dt = C dV_g(t)/dt = -\omega C V_0 \sin(\omega t) = -I_0 \sin(\omega t) \quad (3)$$

Repetimos la misma secuencia de gráficos que presentamos para una resistencia (Figura 4).

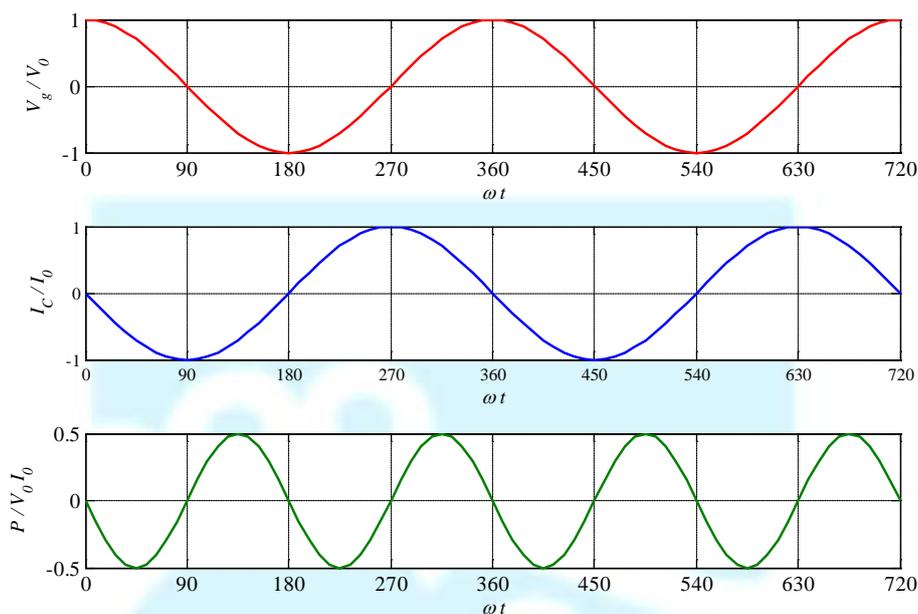


Figura 4. Tensión del generador (rojo), corriente en el capacitor (azul) y potencia entregada por el generador (verde) versus ωt . Los valores están normalizados.

Notamos diferencias importantes con lo obtenido para una resistencia. La curva de corriente (azul) no puede ser superpuesta directamente con la tensión (roja) porque están desplazadas. Nos preguntamos entonces cuánto deberíamos correr la curva de corriente para que la pudiéramos superponer con la de tensión. Como se trata de funciones periódicas tenemos dos opciones que mostramos en la siguiente figura en la que la variable independiente ωt tiene un rango diferente para facilitar el análisis (entramos en los valores negativos) (Figura 5).

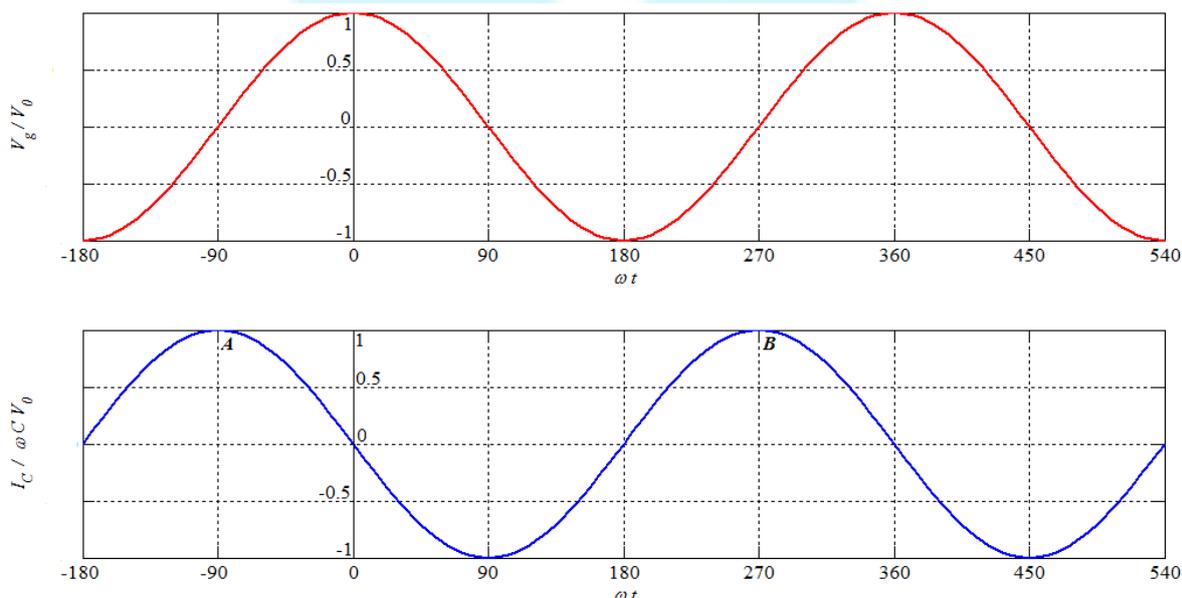


Figura 5. Tensión del generador (rojo) y corriente en el capacitor (azul) vs ωt

Podemos correr la curva de corriente 90° hacia la derecha hasta que el punto A llegue al origen o bien moverla hacia la izquierda 270° hasta que el punto B lo haga. Con cualquiera de estas dos opciones logramos que las curvas de tensión y corriente puedan ser superpuestas. Para eliminar esta indefinición convenimos en tomar la opción de menor módulo, es decir la que corre el punto A 90° hacia la derecha.

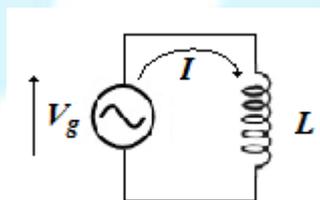
Si miramos la gráfica el evento asociado con el punto A (máximo de la curva azul) ocurre 90° antes que el máximo de la curva de tensión, por lo que declaramos que la curva de corriente adelanta 90° a la tensión.

Volvamos ahora a la figura 4 y analicemos la curva de potencia entregada por el generador. Basta una mirada para darnos cuenta de que el valor medio de la misma es nulo. El resultado se puede comprender recordando que el trabajo realizado para cargar el capacitor, puesto que es realizado contra fuerzas conservativas, es recuperado durante la descarga del mismo. No hay transferencia neta de energía del generador al capacitor en un ciclo.

11.2.3. La respuesta de un inductor

El concepto del coeficiente de autoinductancia L fue presentado durante el estudio de la Ley de Faraday. En la figura 6 mostramos una inductancia conectada al generador de alterna y calcularemos la corriente. Al analizar la malla consideramos que la “fotografía” la tomamos cuando $dI(t)/dt > 0$ (esto define los signos).

Figura 6. Inductancia conectada a un generador de alterna



$$V_g(t) - L \frac{dI(t)}{dt} = 0$$

$$\int [V_g(t)/L] dt = \int dI_L \Rightarrow I_L(t) = (V_0/\omega L) \sin(\omega t) = I_0 \sin(\omega t) \quad (4)$$

La integral anterior es indefinida por lo que falta la constante de integración que definiremos más tarde.

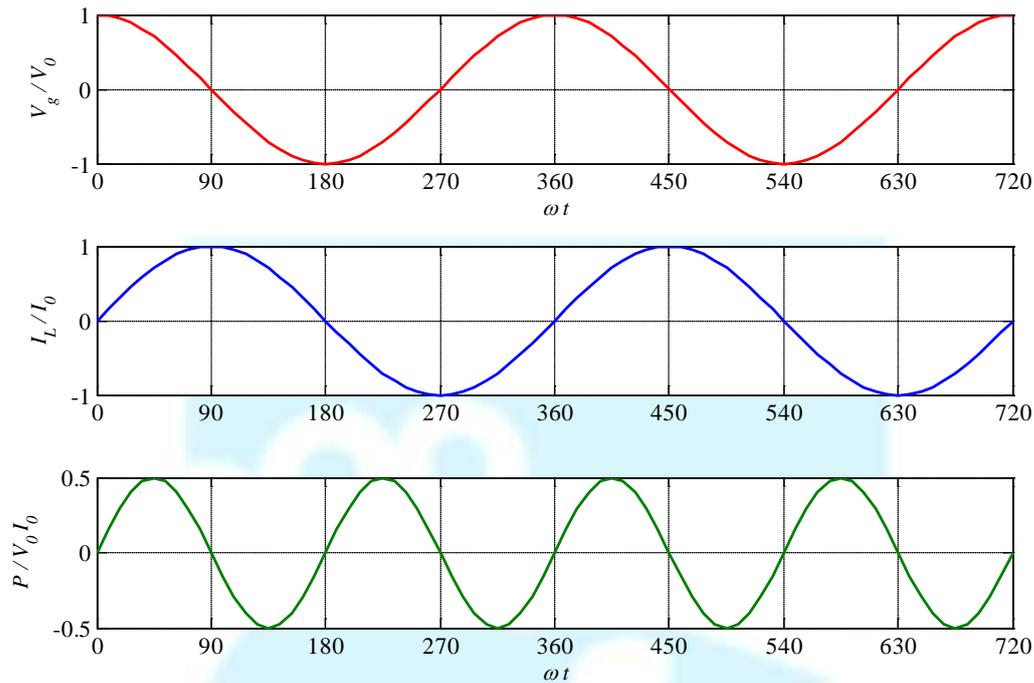


Figura 7. Tensión del generador (rojo), corriente en el inductor (azul) y potencia entregada por el generador (verde) versus ωt . Los valores están normalizados.

Al observar las curvas de tensión y corriente volvemos a notar que están desplazadas. Si volvemos sobre la misma idea que utilizamos en el caso del capacitor, notamos que debemos correr la curva azul 90° hacia la izquierda para que las curvas roja y azul puedan ser superpuestas. La otra opción, mover la curva azul hacia la derecha, involucra un corrimiento de 270° , por lo que queda descartado. Notamos que el máximo de la curva azul que desplazaremos ocurre 90° después que el máximo de la curva roja. En este caso declaramos que la corriente atrasa 90° respecto de la tensión.

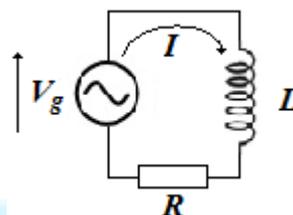
En cuanto a la potencia entregada por el generador, nos encontramos con el mismo resultado que en el caso del capacitor; la media es cero. El resultado es esperable; el trabajo realizado para crear el campo magnético en el interior del inductor conforme crece la corriente es recuperado cuando la corriente disminuye.

11.2.4. Combinando elementos

Los tres análisis anteriores estuvieron dirigidos a estudiar la respuesta de los tres componentes fundamentales ante una excitación armónica. Vamos a considerar ejemplos más complicados para ir generando un método de análisis simplificado.

Comenzamos un con un modelo muy simplificado del **motor eléctrico de un ventilador de techo.**

Figura 8. Modelo simplificado de un motor eléctrico.



La inductancia L representa el arrollamiento de alambre necesario para conseguir el campo magnético. La resistencia R representa a la de los cables y, según se enseña en materias avanzadas, también da cuenta del trabajo mecánico realizado por el motor.

Computamos las caídas de tensión en la malla y obtenemos:

$$\begin{aligned} V_g(t) - L \frac{dI(t)}{dt} - RI(t) &= 0 \\ L \frac{dI(t)}{dt} + RI(t) &= V_0 \cos(\omega t) \end{aligned} \quad (5)$$

Esta es una ecuación diferencial lineal de primer orden no homogénea (nombres complicados para asustar).

La solución de la misma se obtiene como la suma de la solución homogénea (con el segundo miembro igual a cero) con la solución particular.

Declaramos, sin demostración, que la solución homogénea describe el comportamiento del circuito durante los momentos posteriores a la conexión. Es un comportamiento transitorio que se extingue rápidamente conforme avanza el tiempo. La solución particular es la relevante para tiempos grandes y es la que denominamos solución de régimen permanente. Vamos a encontrar dicha solución.

Hay varios métodos pero uno simple es el que propone armar una solución con la misma dependencia temporal que el miembro de la derecha, así como sus derivadas en la medida que no sean nulas o repitan dependencias ya encontradas.

Esta oración es más difícil de decir que de implementar. El miembro de la derecha depende con $\cos(\omega t)$, derivamos una vez y obtenemos $\sin(\omega t)$, derivamos nuevamente y obtenemos $\cos(\omega t)$ pero este término ya repite porque es igual al primero.

Proponemos entonces esta solución:

$$I(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) \quad (6)$$

Donde A y B son constantes a determinar.

Reemplazamos la solución propuesta en la ecuación diferencial:

$$L[-\omega A \sin(\omega t) + \omega B \cos(\omega t)] + R[A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)] = V_0 \cos(\omega t) \quad (7)$$

Para que esta igualdad se cumpla para cualquier t debe verificarse que:

$$-\omega LA + RB = 0 \text{ (eliminamos los términos en } \sin(\omega t)) \quad (8)$$

$$\omega LB + RA = V_0 \text{ (igualamos los términos en } \cos(\omega t)) \quad (9)$$

$$\text{De la primera obtenemos: } B = \omega LA / R \quad (10)$$

Reemplazamos en la segunda:

$$A[\omega^2 L^2 / R + R] = V_0 \quad (11)$$

$$A = (V_0 R) / [\omega^2 L^2 + R^2] \quad (12)$$

Ahora reemplazamos en la solución propuesta:

$$I = \frac{V_0 R}{\omega^2 L^2 + R^2} \cos(\omega t) + \frac{V_0 \omega L}{\omega^2 L^2 + R^2} \sin(\omega t) = \frac{V_0}{\omega^2 L^2 + R^2} [R \cos(\omega t) + \omega L \sin(\omega t)] \quad (13)$$

El último término es de la forma $a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)$, la que puede ser llevada a $c \cos(\omega t + \varphi)$ con $c = (a^2 + b^2)^{(1/2)}$ y $\varphi = \tan^{-1}(-b/a)$.

Con este último paso obtenemos:

$$I(t) = (V_0 / [R^2 + \omega^2 L^2]^{(1/2)}) \cos(\omega t + \varphi); \quad \varphi = \tan^{-1}(-\omega L / R) \quad (14)$$

Como ejemplo consideremos que el generador corresponde a la red domiciliaria de nuestro país (220 V eficaces, 50 Hz) y que $L = 1$ H y $R = 628 \Omega$.

$$\varphi = \tan^{-1}(-\omega L / R) = \tan^{-1}(-2\pi \cdot 50 \text{ Hz} \cdot 1 \text{ H} / 628 \Omega) = -26.58^\circ = -0.4639 \text{ rad}$$

$$[R^2 + \omega^2 L^2]^{(1/2)} = [628 \Omega^2 + (2\pi \cdot 50 \text{ Hz} \cdot 1 \text{ H})^2]^{(1/2)} = 702.2 \Omega$$

$$I(t) = [220 \text{ V} \cdot 2^{(1/2)} / 702.2 \Omega] \cos(2\pi \cdot 50 \text{ Hz} \cdot t - 0.4639) = 0.4431 \text{ A} \cos(2\pi \cdot 50 \text{ Hz} \cdot t - 0.4639)$$

Volvemos a nuestras clásicas gráficas, donde podemos observar que la corriente (curva azul), está corrida 26.58° hacia la derecha respecto de la tensión (curva roja), es decir que la corriente está *atrasada* 26.58° respecto de la tensión. Las curvas ahora están graficadas en función del tiempo t y no de ωt como antes. Asimismo, los valores de tensión, corriente y potencia no están normalizados a los respectivos máximos como antes.

La curva de potencia (verde) nos muestra que su media es positiva, es decir que hay una transferencia neta de energía del generador hacia el circuito, esto se debe a la potencia disipada en la resistencia que calcularemos más tarde. También se puede notar que la potencia transferida toma valores negativos durante algunos intervalos de tiempo. Esto es energía retornada al generador.

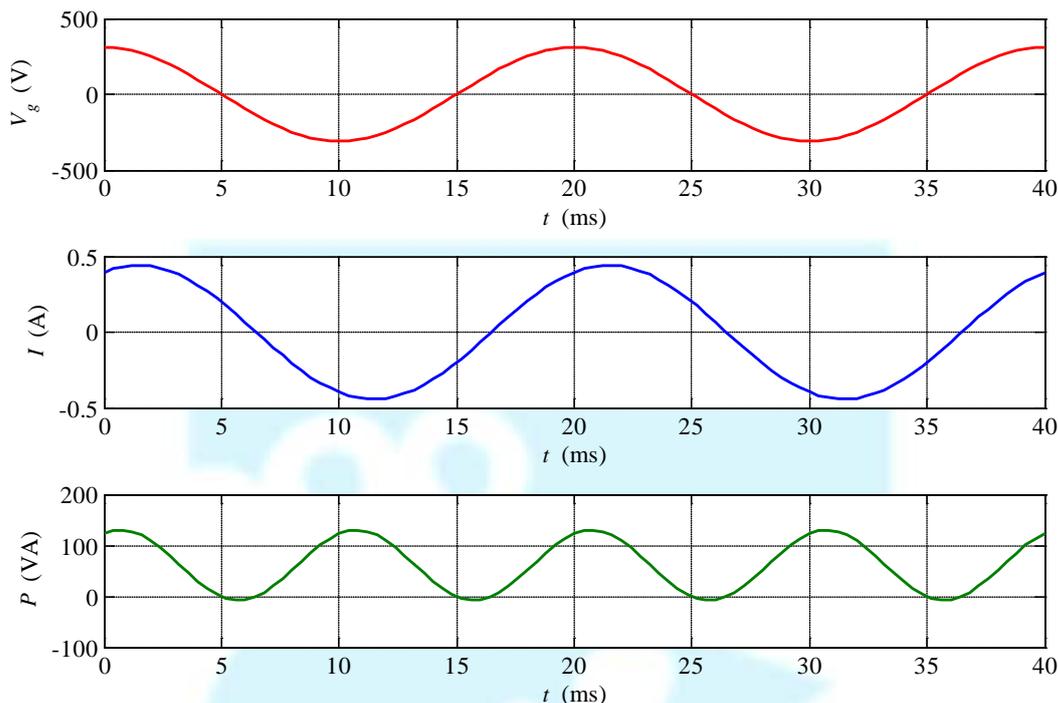
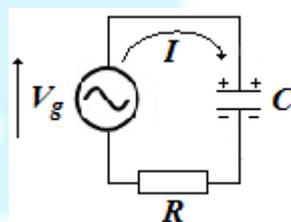


Figura 9. Tensión, corriente y potencia para $V_g = 220 \text{ Vef.}$, $R = 628 \Omega$, $L = 1 \text{ H}$ y $f = 50 \text{ Hz}$.

Como segundo ejemplo consideraremos un circuito que es un “primo” del anterior: un capacitor en serie con una resistencia.

Figura 10. Circuito serie RC



Al hacer la circulación en la malla encontramos:

$$V_g(t) - \frac{Q(t)}{C} - I(t)R = 0 \tag{15}$$

$$\frac{1}{C} \int I(t) dt + I(t)R = V_0 \cos(\omega t)$$

El segundo renglón se obtiene recordando que la carga es la integral de la corriente a lo largo del tiempo. Falta la constante de integración como mencionamos en otro caso que tuvimos una integral.

¿Cómo hacemos para resolver esta ecuación? Se trata de una ecuación integral que no hemos tratado nunca, pero en este caso se puede transformar en una más simple si derivamos miembro a miembro con respecto al tiempo:

$$\frac{I(t)}{C} + R \frac{dI}{dt} = -\omega V_0 \sin(\omega t) \tag{16}$$

Ahora estamos en la misma situación que el caso anterior. No vamos a proceder en detalle porque lo dejamos como un ejercicio. Sólo daremos el resultado final para poder verificar (¡¡¡Háganlo!!!):

$$I(t) = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}} \cos(\omega t + \varphi); \quad \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\omega RC}\right) \quad (17)$$

11.3. La notación compleja

Los desarrollos anteriores no ha sido particularmente difíciles, pero sí muy largos y aburridos. Es un método lento y proclive a errores. Intuitivamente sentimos que los circuitos no se deben analizar así porque el cálculo de la instalación de una casa demoraría una vida.

Efectivamente, existe una forma más simple pero debemos enfrentarnos a una de nuestras malas experiencias: **los números complejos**.

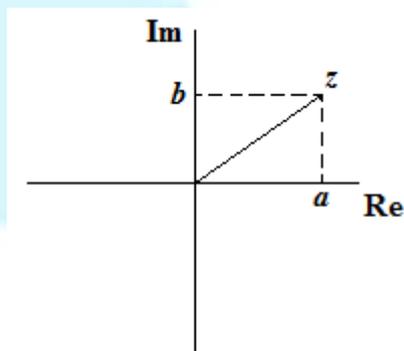
*Complex numbers for dummies**

Vamos a hacer un repaso de lo mínimo que necesitamos sobre números complejos y nos limitaremos a hacer las cuatro operaciones elementales.

Sin pretensiones de rigor matemático definimos la unidad imaginaria como el número, obviamente no real, tal que su cuadrado es igual a -1. Habitualmente la unidad imaginaria se designa con la letra i , pero como dicha letra la hemos utilizado para la corriente emplearemos la letra j . En ingeniería el uso de j es muy habitual, de hecho sirve para saber si el docente estudió ingeniería u otra carrera. En resumen $j^2 = -1$.

Un número complejo z se conforma con una parte real y una imaginaria: $z = a + j b$, donde a y b son números reales. La suma anterior es simbólica, sólo indica la combinación de una parte real y una imaginaria. La representación anterior de un número complejo se denomina cartesiana y es fácil de llevar al denominado plano complejo que queda determinado por los ejes real (Re) e imaginario (Im).

Figura 10. El plano complejo



Dados dos números complejos $z_1=a_1+j b_1$ y $z_2=a_2+j b_2$, su suma o resta queda dada por la suma o resta de las partes reales e imaginarias respectivamente:

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 \pm a_2) + j (b_1 \pm b_2) \quad (18)$$

El producto es un poco más tedioso; debemos multiplicar término a término recordando que $j^2 = -1$.

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + j (a_1 b_2 + b_1 a_2) \quad (19)$$

El cociente es aún más tedioso y requiere del uso de lo que llamamos el conjugado de un número complejo. Denominamos conjugado (z^*) del número complejo z al que se obtiene cambiando el signo de la parte imaginaria de z : $z^* = a - jb$

$$\text{Podemos notar que } z \cdot z^* = a^2 + b^2$$

Podemos calcular el cociente de dos números complejos como:

$$z_1 / z_2 = (z_1 / z_2) \cdot (z_2^* / z_2^*) = (z_1 \cdot z_2^*) / (a_2^2 + b_2^2) \quad (20)$$

Ciertamente el producto y cociente son operaciones de complejidad creciente y veremos otras formas más simples.

Un auxiliar muy importante que utilizaremos es la denominada fórmula de Euler que establece que para un número real α se cumple (sin demostración):

$$e^{j\alpha} = \cos(\alpha) + j \sin(\alpha) \quad (21)$$

A partir de la fórmula de Euler podemos representar al número complejo z de otra forma (hacer el dibujo):

$$z = a + jb = \sqrt{a^2 + b^2} e^{j\alpha} = |z| e^{j\alpha} \quad (22)$$

$$\tan(\alpha) = \frac{b}{a}$$

Las relaciones anteriores aparecen automáticamente con la fórmula de Euler, la observación de la figura 10 y el teorema de Pitágoras.

Con la ayuda del editor de texto y de ecuaciones no es difícil escribir subíndices o supraíndices. Muy distinto era en la época de la máquina de escribir, por lo que se generó una notación idéntica a la anterior pero adaptada a esos tiempos:

$$z = |z| e^{j\alpha} = |z| \angle \alpha \quad (23)$$

El miembro de la derecha utiliza la notación de ángulo dada por la barra de dividir y la tecla de subrayar. Con esta notación el ángulo α lo podemos dar en grados, lo que es mucho más cómodo. Esta es la llamada representación polar porque damos el módulo del número complejo y el ángulo que forma con respecto al eje real.

Con la fórmula de Euler y lo que hemos expuesto sobre producto y cocientes de números complejos podemos dar una variante menos trabajosa para estas operaciones

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= |z_1| |z_2| e^{j(\alpha_1 + \alpha_2)} = |z_1| |z_2| / \underline{\alpha_1 + \alpha_2} \\ z_1 / z_2 &= |z_1| / |z_2| e^{j(\alpha_1 - \alpha_2)} = |z_1| / |z_2| / \underline{\alpha_1 - \alpha_2} \end{aligned} \quad (24)$$

Ahora las operaciones de multiplicación y división son mucho más simples. En síntesis la suma o resta conviene efectuarla en la representación cartesiana y el producto o la división en la representación polar.

Para pasar de una a otra tenemos varias herramientas. En las calculadoras Casio ® (las más habituales al momento en que escribimos este apunte) existen dos teclas llamadas **Rect** y **Pol** que permiten pasar de un formato al otro (aunque parezca mentira hay que leer el manual de la calculadora). Para quienes utilizan dispositivos Android ® hay una aplicación gratuita llamada **Droid48** ®, la que simula el comportamiento de una calculadora Hewlett-Packard HP48 ®. Esta calculadora realiza todas las operaciones con números complejos en cualquier formato.

Este es el repaso elemental. Siempre quedan Google y Wikipedia como fuentes extra de conocimiento.

El problema del ventilador desde otra óptica (de 11.2.4.)

Retomemos el problema del modelo equivalente del motor eléctrico del ventilador. Sabemos que bajo una excitación de la forma $V_g(t) = V_0 \cos(\omega t)$ la corriente que circula es $I(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi)$ (I_0 y φ fueron desarrollados más arriba).

Parece obvio que si reemplazamos $I(t)$ en la ecuación (5) vamos a obtener una identidad. Vamos a hacerlo pero en una forma demencial: toda vez que aparezca una función armónica la expresaremos con la fórmula de Euler prestando atención a las siguientes identidades que se siguen de escribir la fórmula de Euler para α y $-\alpha$ y recordando que coseno es una función par y seno una impar ($\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$; $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$):

$$\begin{aligned} \cos(\alpha) &= \frac{e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}}{2} \\ \sin(\alpha) &= -j \frac{e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}}{2} \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} V_g(t) &= V_0 \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} \\ I(t) &= I_0 \frac{e^{j(\omega t + \varphi)} + e^{-j(\omega t + \varphi)}}{2} \end{aligned} \quad (26)$$

Vamos a la Ec. (5)

$$L \frac{dI}{dt} + RI = V_g$$

$$LI_0 \left[\frac{j\omega e^{j(\omega t + \varphi)} - j\omega e^{-j(\omega t + \varphi)}}{2} \right] + RI_0 \left[\frac{e^{j(\omega t + \varphi)} + e^{-j(\omega t + \varphi)}}{2} \right] = V_0 \left[\frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} \right] \quad (27)$$

Cancelamos el divisor común y separamos los términos en $e^{j\omega t}$ y $e^{-j\omega t}$

$$I_0 e^{j(\omega t + \varphi)} (R + j\omega L) = I_0 e^{j\varphi} e^{j(\omega t)} (R + j\omega L) = V_0 e^{j(\omega t)} \quad (28)$$

$$I_0 e^{-j(\omega t + \varphi)} (R - j\omega L) = I_0 e^{-j\varphi} e^{-j(\omega t)} (R - j\omega L) = V_0 e^{-j(\omega t)} \quad (29)$$

Procesemos primero la (28). Como $e^{j\omega t}$ nunca es nulo podemos cancelarlo en todos los términos.

$$I_0 e^{j\varphi} (R + j\omega L) = V_0 \quad (30)$$

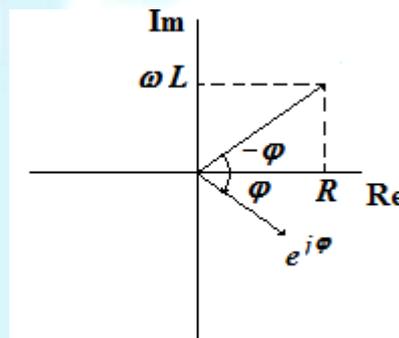
La Ec. (30) es una ecuación simple pero que merece ser analizada porque tiene la clave de lo que viene más tarde.

Tanto I_0 como V_0 son números reales porque son las amplitudes de la corriente y de la tensión. Por otra parte, tanto $e^{j\varphi}$ como $(R + j\omega L)$ son números complejos.

Cuando analizamos la Ec.(30) observamos que el ángulo que forma el número $e^{j\varphi}$ en el plano complejo debe ser opuesto al de $(R + j\omega L)$ puesto que es la única forma en la que el producto del miembro izquierdo de la (30) devuelva un número real.

Vamos a graficar $e^{j\varphi}$ y $(R + j\omega L)$ en un mismo dibujo a pesar de que no tienen las mismas unidades porque nos interesa ver el tema del ángulo.

Figura 11. Parte de la (30) en forma gráfica



Es importante notar que sólo si cumplimos las condiciones de la figura entonces podemos satisfacer la Ec.(30).

De párrafos anteriores conocemos el valor de φ , pero ahora lo podemos calcular de una manera mucho más simple: es el opuesto del ángulo formado por el número $(R + j\omega L)$.

Algo similar sucede con I_0 , nos basta despejar de la Ec.(30):

$$I_0 = \frac{V_0}{e^{j\varphi} (R + j\omega L)} = \frac{V_0}{[1 / \varphi] [R + j\omega L / -\varphi]} = \frac{V_0}{|R + j\omega L|} \quad (31)$$

La conclusión extraña es que los valores de φ e I_0 fueron calculados de una manera diferente pero obtuvimos el mismo valor que antes.

Hasta aquí trabajamos con la Ec.(28); pasemos ahora a la Ec.(29).

Si reemplazamos en ella observamos que obtenemos exactamente la misma información que con la Ec.(28). La Ec.(29) no aporta información extra y la podemos descartar.

Entonces nos encontramos con que la Ec.(28) es nuestra herramienta. La copiamos para analizarla.

$$I_0 e^{j(\omega t + \varphi)} (R + j\omega L) = I_0 e^{j\varphi} e^{j(\omega t)} (R + j\omega L) = V_0 e^{j(\omega t)}$$

Aparecen dos “objetos” que tienen semejanza con sus contrapartes del mundo físico pero que no son iguales, de hecho son números complejos:

$$\begin{aligned} &V_0 e^{j\omega t} \\ &I_0 e^{j(\omega t + \varphi)} \end{aligned} \quad (32)$$

El primero es la función “asociada” con el generador y la segunda con la corriente. Estos “objetos” son denominados fasores (<http://en.wikipedia.org/wiki/Phasor>) y son muy utilizados en el análisis de sistemas sometidos a una excitación armónica. Los fasores son números complejos que “rotan” en el plano complejo a una velocidad angular ω .

Reescribamos la Ec.(28) yendo un paso para atrás, aplicando propiedad distributiva.

$$RI_0 e^{j(\omega t + \varphi)} + j\omega LI_0 e^{j(\omega t + \varphi)} = V_0 e^{j(\omega t)}$$

El primer sumando es la parte “asociada” con la caída de tensión en la resistencia y el segundo es el análogo correspondiente a la inductancia. Recordemos esto porque en poco tiempo sacaremos una conclusión.

Pasemos ahora a analizar, con esta técnica, al circuito de la figura 10 y que se encontraba descrito por la ecuación 15.

$$\begin{aligned} &\frac{1}{C} \int I(t) dt + I(t)R = V_0 \cos(\omega t) \\ &\frac{1}{C} \int I_0 \left[\frac{e^{j(\omega t + \varphi)} + e^{-j(\omega t + \varphi)}}{2} \right] dt + I_0 \left[\frac{e^{j(\omega t + \varphi)} + e^{-j(\omega t + \varphi)}}{2} \right] R = V_0 \left[\frac{e^{j(\omega t)} + e^{-j(\omega t)}}{2} \right] \end{aligned} \quad (33)$$

Separemos los términos en $j\omega t$ y $-j\omega t$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{C} \int I_0 \left[\frac{e^{j(\omega t + \varphi)} + e^{-j(\omega t + \varphi)}}{2} \right] dt + I_0 \left[\frac{e^{j(\omega t + \varphi)} + e^{-j(\omega t + \varphi)}}{2} \right] R &= V_0 \left[\frac{e^{j(\omega t)} + e^{-j(\omega t)}}{2} \right] \\ \frac{1}{C} \int I_0 \left[\frac{e^{j(\omega t + \varphi)}}{2} \right] dt + I_0 \left[\frac{e^{j(\omega t + \varphi)}}{2} \right] R &= V_0 \left[\frac{e^{j(\omega t)}}{2} \right] \\ \frac{1}{C} \int I_0 \left[\frac{e^{-j(\omega t + \varphi)}}{2} \right] dt + I_0 \left[\frac{e^{-j(\omega t + \varphi)}}{2} \right] R &= V_0 \left[\frac{e^{-j(\omega t)}}{2} \right] \end{aligned} \quad (34)$$

Trabajemos sobre la segunda ecuación (términos en $j\omega t$).

$$\begin{aligned} \frac{1}{C} \int I_0 \left[\frac{e^{j(\omega t + \varphi)}}{2} \right] dt + I_0 \left[\frac{e^{j(\omega t + \varphi)}}{2} \right] R &= V_0 \left[\frac{e^{j(\omega t)}}{2} \right] \\ \frac{1}{C} \frac{-j I_0 e^{j(\omega t + \varphi)}}{\omega} + \frac{I_0 e^{j(\omega t + \varphi)}}{2} R &= V_0 \left[\frac{e^{j(\omega t)}}{2} \right] \\ I_0 e^{j(\omega t + \varphi)} \left[R - \frac{j}{\omega C} \right] &= V_0 e^{j(\omega t)} \\ I_0 e^{j(\varphi)} \left[R - \frac{j}{\omega C} \right] &= V_0 \end{aligned} \quad (35)$$

La Ec.(35) se parece mucho a la Ec.(28) y todos los razonamientos que hicimos pueden ser repetidos para encontrar los valores de I_0 y φ .

Ahora nos encontramos con que el número $R - j/\omega C$ pertenece al cuarto cuadrante, por lo tanto φ pertenece al primero y concluimos que la corriente adelanta a la tensión.

Repitiendo lo hecho anteriormente hallamos que:

$$I_0 = \frac{V_0}{\left| R - \frac{j}{\omega C} \right|} = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 - \left(\frac{1}{\omega C} \right)^2}} \quad \varphi = \tan^{-1} \left(\frac{1}{\omega C R} \right) \quad (36)$$

Si ahora desarrollamos los términos de la ecuación en $-j\omega t$ nos encontramos con que el resultado es exactamente el mismo que la Ec.(36). No hay información extra.

11.4. Venciendo en el campo complejo

Es interesante repasar lo que hemos hecho hasta el momento. Entre las ecuaciones de (5) a (14) nos permitieron resolver el comportamiento en régimen permanente de un circuito RL serie por los métodos tradicionales de ecuaciones diferenciales.

Analizamos, por el mismo método, un circuito RC serie en las ecuaciones (15) a (17), pero no hay que engañarse; el número de pasos es menor porque no lo hicimos en detalle.

Por otra parte, con la ecuación (28) resolvimos el primer circuito y con la Ec.(34) el segundo por un método algebraico, en apariencia, muy distinto.

La discrepancia no es tal y se puede comprender al analizar los pasos dados.

Al calcular la caída de tensión sobre la inductancia ($L di/dt$) cuando usamos la forma “auxiliar” de la corriente Ec.(32) inevitablemente tendremos un término $j\omega LI$.

Análogamente, si tratamos con un capacitor, la caída de tensión está dada por

$$1/C \int Idt = -j/\omega C I.$$

La conclusión es que en el mundo “auxiliar” podemos computar las caídas de tensión en una inductancia o en un capacitor multiplicando a la corriente por el factor $j\omega L$ (inductancia) o por $-j/\omega C$ (capacitor).

Con estos auxiliares podemos armar una **pseudo Ley de Kirchhoff** con números complejos que nos permiten resolver el problema en el campo auxiliar.

Nos falta mencionar a la resistencia, pero su papel es trivial porque al calcular la caída de tensión sobre ella sólo debemos multiplicar la resistencia por la corriente, con lo que no obtenemos ningún objeto nuevo.

Podemos entonces sintetizar diciendo que a la resistencia física R le asignamos en el campo auxiliar el número real R . Análogamente a la inductancia física L le asignamos el número complejo $j\omega L$. Finalmente, a la capacitancia física C le asignamos el número complejo $-j/\omega C$.

Estas tres cantidades son válidas en el mundo “auxiliar”, no en el mundo físico. De hecho dos de ellos son complejos.

Sin embargo, estas cantidades nos permiten armar una pseudo-ley de Kirchhoff con la que podemos resolver rápidamente el problema.

La cantidad ωL recibe el nombre de reactancia inductiva X_L y $1/\omega C$ es conocida como reactancia capacitiva X_C . Ambas cantidades son definidas sin la unidad imaginaria y sin el signo menos en el caso del capacitor.

Veámoslo con un ejemplo porque es mucho más fácil. Consideremos el siguiente circuito

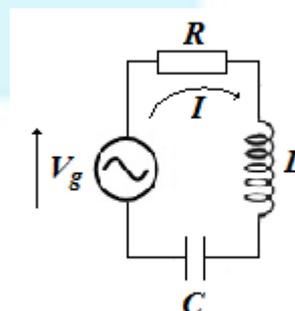


Figura 12. Circuito RLC serie

Escribimos la pseudo-ley de Kirchhoff en el campo “auxiliar”:

$$RI_0 e^{j(\omega t + \varphi)} + j\omega LI_0 e^{j(\omega t + \varphi)} - j/\omega C I_0 e^{j(\omega t + \varphi)} = V_0 e^{j\omega t} \quad (37)$$

$$[R + j\omega L - j/\omega C] I_0 e^{j(\omega t + \varphi)} = V_0 e^{j\omega t}$$

Una vez más cancelamos el término común no nulo $e^{j\omega t}$ para obtener:

$$[R + j\omega L - j/\omega C] I_0 e^{j\varphi} = V_0 \quad (38)$$

Esta última ecuación es operacionalmente idéntica a la Ec.(30) por lo que poco podemos agregar. El ángulo que forma el número complejo $[R + j\omega L - j/\omega C]$ **DEBE** ser igual a $-\varphi$ para satisfacer la igualdad. El número I_0 se obtiene por simple despeje.

Si meditamos un poquito notamos que la Ec.(37) contiene un paso que puede ser omitido porque siempre se repite: cancelar el término común $e^{j\omega t}$ y pasamos directamente a la Ec.(38) (más simple).

El último paso es simplemente dividir ambos miembros de la Ec.(38) por $\sqrt{2}$, así conseguimos que la Ec.(38) quede expresada en valores eficaces en lugar de pico. Nuestra “obsesión” con los valores eficaces estriba en que, aunque no lo hemos mostrado aún, todos los cálculos relevantes corresponden a valores eficaces.

$$[R + j\omega L - j/\omega C] I_{ef} e^{j\varphi} = V_{ef} \quad (39)$$

Hagamos un ejemplo numérico. Tomemos que la alimentación corresponde a la red de nuestro país (220 V eficaces, $f = 50$ Hz) y sean $R = 300 \Omega$, $L = 1$ H y $C = 50 \mu\text{F}$.

Obtenemos:

$X_L = 2 \pi 50 \text{ Hz } 1\text{H} = 314 \Omega$; $X_C = 1/(2 \pi 50 \text{ Hz } 50 \mu\text{F}) = 63.7 \Omega$ (revisar que las unidades de X_L y X_C son Ohms)

$$[300 + j 250.5] \Omega I_{ef} e^{j\varphi} = 220 \text{ V.}$$

Primero calculamos φ como el *opuesto* del ángulo que forma el número $[300 + j 250.5] \Omega$

$$\varphi = -\tan^{-1}(250.5 \Omega / 300 \Omega) = -39.86^\circ$$

Habiendo obtenido un ángulo negativo concluimos que la corriente atrasa con respecto a la tensión.

Ahora despejamos $I_{ef} = 0.56$ A y entonces decimos que en el circuito circula una corriente de 0.56 A atrasada -39.86 grados.

El valor $R + j(\omega L - 1/\omega C)$ representa, en nuestro dominio auxiliar, el efecto combinado de la resistencia, la capacitancia y la inductancia. Recibe el nombre de impedancia Z .

Hemos resuelto un problema que, en el mundo físico, involucraba operaciones algebraicas, diferenciales e integrales. Lo resolvimos en un dominio “auxiliar” de números complejos pero mucho más simple.

La experiencia nos muestra que en este punto la media de los lectores se encuentra confundida, cuando no definitivamente enojada. Muy probablemente tal emoción se deba a la poca familiaridad con el uso de los números complejos. Para solucionarlo vamos a seguir con ejemplos.

Vamos a atacar uno de los errores más comunes pero antes lo vamos a poner en contexto.

Hasta el presente hemos utilizado voltímetros de corriente continua (DC). El mismo voltímetro puede medir valores de alterna (AC) luego de apretar un botón (no decimos qué pasa pero sí es importante ver el display porque aparecen las leyendas DC y AC).

Los voltímetros están calibrados en **VALORES EFICACES** y registran la caída de tensión eficaz entre los dos puntos del circuito que estamos midiendo. La lectura es siempre positiva (no tiene sentido hablar de más o menos en el caso de alterna). Estos son los voltímetros comunes que utilizamos en el laboratorio y en la industria “común”. Unos pocos voltímetros son capaces de medir el valor eficaz de la caída de tensión y el ángulo de desfase con respecto a una referencia. Éstos son denominados voltímetros vectoriales (sería mejor llamarlos fasoriales). Son muchísimo más caros que los comunes (miles de dólares) y en la Facultad hay uno solo (difícil de conseguir). Bien, usaremos voltímetros comunes entonces.

Calculemos los valores eficaces de las caídas de tensión del problema anterior:

$$V_R = I_{ef} R = 0.56 \text{ A } 300 \Omega = 168.87 \text{ V}$$

$$V_L = I_{ef} X_L = 0.56 \text{ A } 314 \Omega = 176.84 \text{ V}$$

$$V_C = I_{ef} X_C = 0.56 \text{ A } 63.7 \Omega = 35.84 \text{ V}$$

Ahora nos viene una tentación del demonio que nos condena al último círculo del infierno: es obvio que los componentes están en serie por lo tanto la suma de las caídas de tensión debe dar la del generador. Si hacemos la suma de los valores anteriores obtenemos 381.55 V, muyyyyyyy lejos de los 220 V del enchufe.

Dónde está el error/horror? Podemos asegurar que todas las cuentas están bien a menos de pequeños errores de redondeo que de ninguna manera pueden dar cuenta de semejante discrepancia.

El **GRAVE ERROR** reside en que hemos sumado las caídas de tensión en módulo sin tener en cuenta que son números complejos.

Repitamos todo pero ahora bien.

$$V_R = I_{ef} R = 0.56 \angle -39.86^\circ \text{ A } 300 \angle 0^\circ \Omega = 168.87 \angle -39.86^\circ \text{ V} = (129.62 - j 108.24) \text{ V}$$

$$V_L = I_{ef} X_L = 0.56 \text{ A } \angle -39.86^\circ 314 \angle 90^\circ \Omega = 176.84 \angle 50.14^\circ \text{ V} = (113.34 + j 135.74) \text{ V}$$

$$V_C = I_{ef} X_C = 0.56 \text{ A } \angle -39.86^\circ 63.7 \angle -90^\circ \Omega = 35.84 \angle -129.86^\circ \text{ V} = (-22.97 - j 27.57) \text{ V}$$

Si ahora sumamos obtenemos un resultado muy próximo a 220 V. La suma de tensiones y/o corrientes **DEBE** ser hecha recordando que son números complejos (en este formalismo).

Es interesante notar que, al hacer los productos, hemos agregado un ángulo de 90 grados a X_L (por el factor j que está adelante) y de -90 grados a X_C (revisar las definiciones).

En la siguiente gráfica representamos los fasores donde mostramos la tensión del generador (rojo), la caída en la resistencia (azul), ídem en la inductancia (verde) y en el capacitor (magenta). La suma **VECTORIAL** de los tres últimos es igual al primero

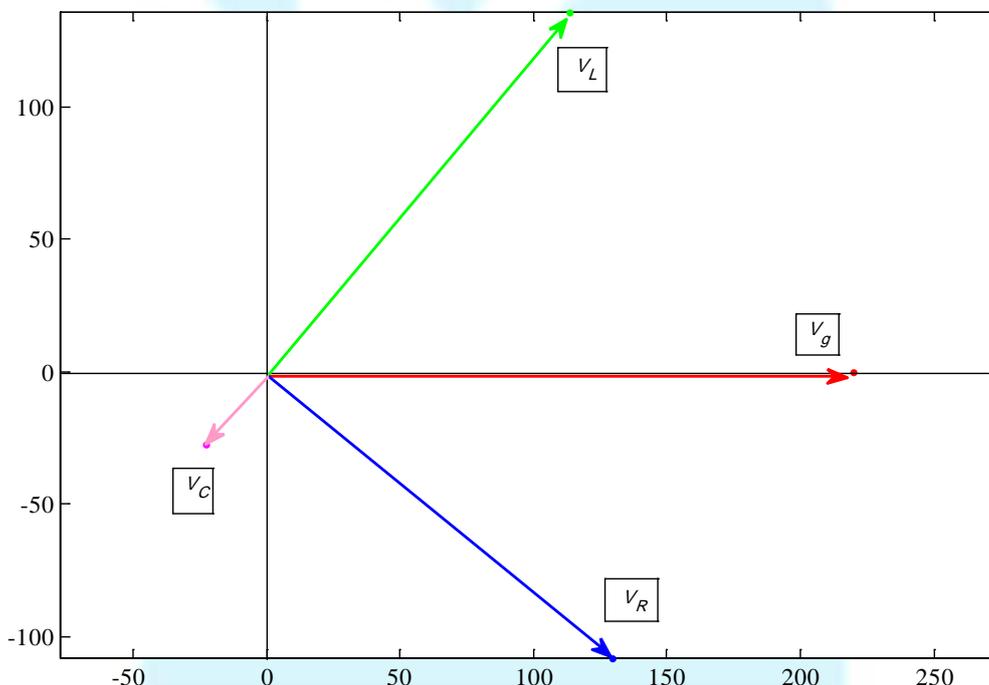


Figura 13. Los tres fasores “sueños”

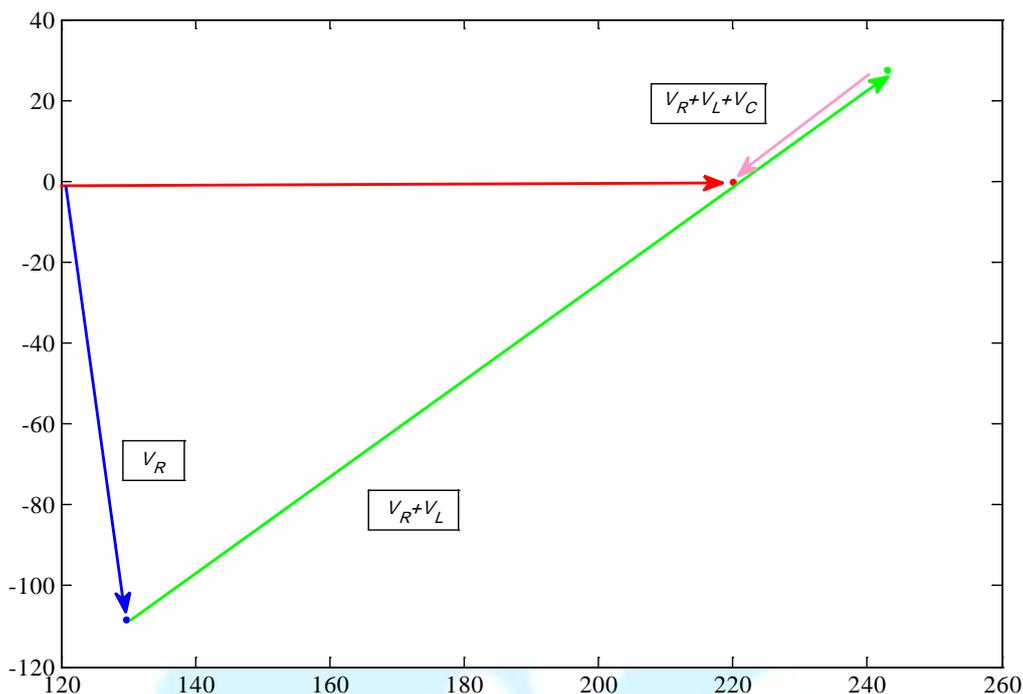


Figura 14. Los tres fasores sumados

La conclusión es que el método es rápido pero nos obliga a trabajar con números complejos. La experiencia muestra que muchos errores vienen de querer evitar el uso de números complejos. Ese no es el camino; es preferible aprender la operatoria con dichos números.

Para seguir practicando estaría bueno dar otro ejemplo para practicar algo distinto y variar un poco. Sin embargo, vamos a analizar un poco más en profundidad el ejemplo que venimos siguiendo para aprender cosas importantes.

11.5. La respuesta en frecuencia

En el ámbito hogareño o fabril la frecuencia del generador de corriente alterna es fija (ya mencionamos los valores típicos). Algún lector más avanzado podrá argumentar que existen los variadores de frecuencia y tiene razón, pero ese es un tema más difícil que no trataremos.

Por el contrario, en el ámbito de la electrónica es muy común tener señales de frecuencia variable. Así que ahora estudiaremos nuestro circuito considerando frecuencia variable.

De la resolución obtuvimos:

$$I_{ef} = \frac{V_{ef}}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} \quad \varphi = -\tan^{-1}\left(\frac{\omega L - 1/\omega C}{R}\right) \quad (40)$$

Tenemos cinco variables: V_{ef} , R , L , C y ω . Demasiadas para graficar. Arbitrariamente fijemos V_{ef} , L y C y dejemos variar ω y R .

Primero notamos que si la combinación de valores asegura que $\omega L = 1/\omega C$ encontramos que $\varphi = 0$ y que la corriente eficaz es la más grande de todas las posibles porque el denominador es el más pequeño posible.

La condición $\varphi = 0$ nos dice que el desfase entre la tensión de alimentación es nulo. Esta condición se denomina de *resonancia*. Además, notamos que $I_{ef} = V_{ef}/R$. Los efectos de la inductancia y el capacitor se han desvanecido para el mundo exterior. Llamaremos ω_r a la pulsación a la que ocurre esta situación (la r es por resonancia). Es fácil obtener $\omega_r^2 = 1/LC$.

Si $\omega > \omega_r$ tenemos $\varphi < 0$, es decir que la corriente atrasa a la tensión y entonces decimos que el circuito tiene comportamiento inductivo. Cuando $\omega < \omega_r$ resulta $\varphi > 0$, la corriente adelanta a la tensión y el circuito es capacitivo. En cualquiera de las dos situaciones anteriores la corriente es menor que la que obtuvimos en resonancia puesto que el denominador de la (40) es más grande que para la condición de resonancia.

Vamos a graficar para $V_{ef} = 1$ V, $L = 1$ mH, $C = 1$ nF y $R = [100, 1000, 10000]$ Ω .

Con los valores previos obtenemos $\omega_r = 1$ M/s y $f_r = 159.15$ kHz.

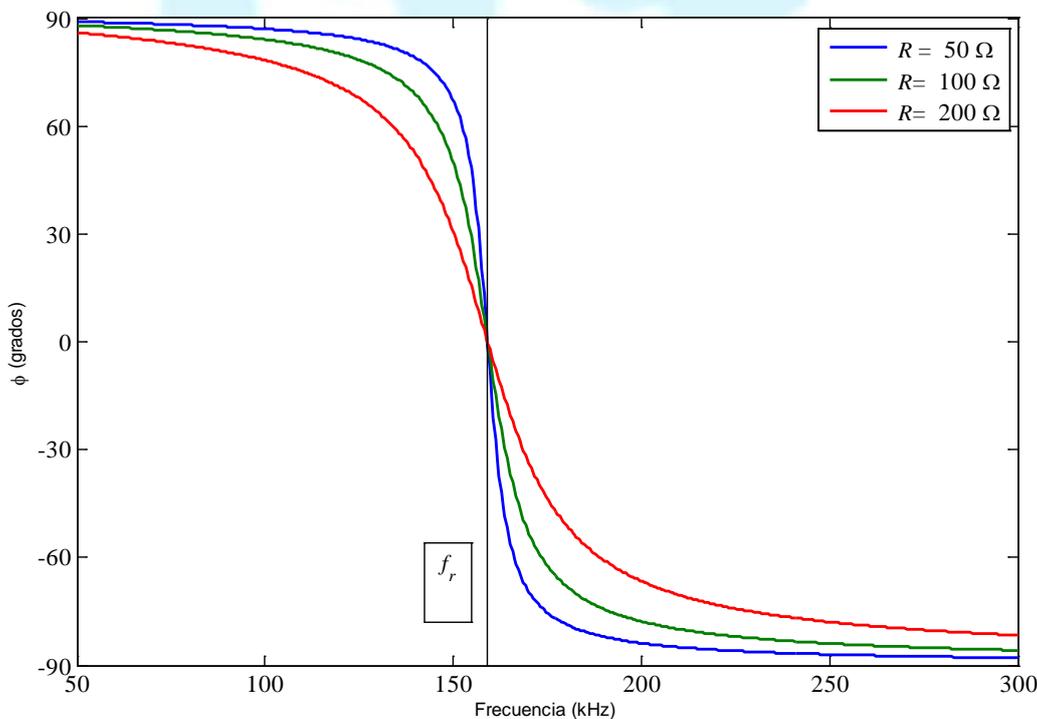


Figura 15. El desfase φ en función de la frecuencia para distintos valores de resistencia.

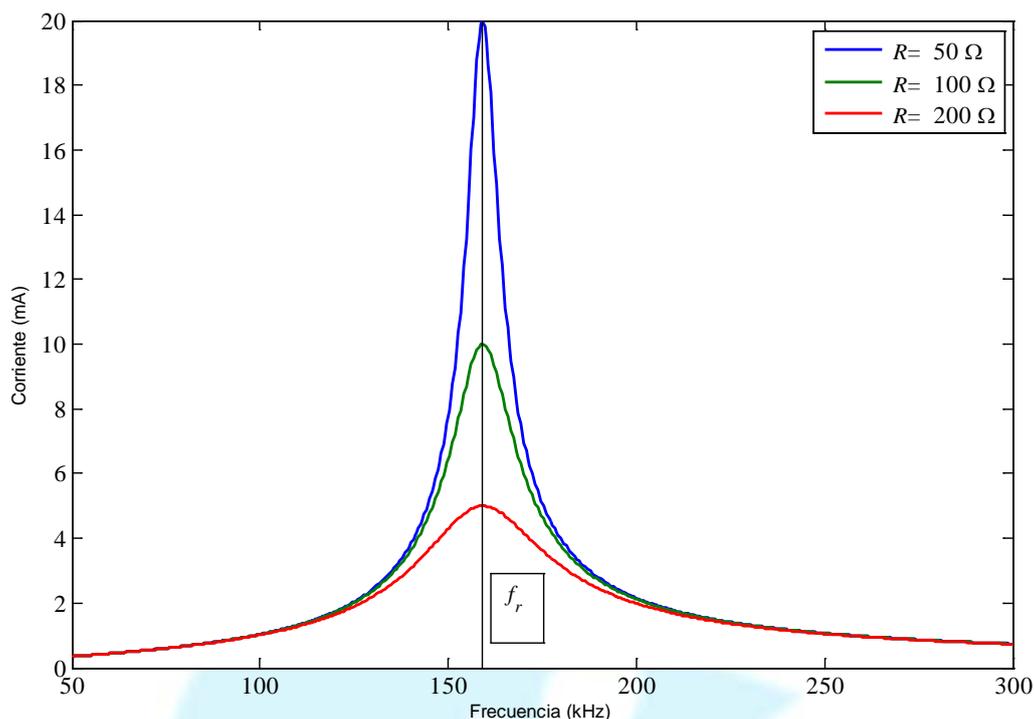


Figura 16. El módulo de la corriente eficaz en función de la frecuencia para distintos valores de resistencia.

Podemos observar que en todos los casos la frecuencia de resonancia es independiente del valor de R (obvio, sólo depende de L y C). La influencia de R es más sutil. Notemos que a medida que aumentamos R la corriente disminuye (a una ω fija). La curva de I_{ef} parece “ensancharse” y la de φ tiene menos variación.

Puesto que hemos graficado en un rango de frecuencias alrededor de la de resonancia es interesante analizar qué valores límite tenemos para frecuencias muy bajas y muy altas.

Si ω tiende a cero en la (40) vemos que φ tiende a 90 grados (capacitivo) y la corriente a cero. Por otra parte, si ω tiende a infinito, φ tiende a -90 grados (inductivo) y la corriente nuevamente tiende a cero.

Como práctica (aunque tiene una importancia que revelaremos más tarde) vamos a calcular los valores para los que $\varphi = \pm 45^\circ$.

Si $\varphi = 45^\circ$ debe ser $X_L - X_C = R$

$$\omega_s L - \frac{1}{\omega_s C} = R$$

$$\frac{\omega_s^2 LC - 1}{\omega_s C} = R$$

$$\omega_s^2 LC - \omega_s RC - 1 = 0$$

$$\omega_s = \frac{RC \pm \sqrt{(RC)^2 + 4LC}}{2LC}$$
(41)

El discriminante es positivo (las soluciones son reales) y es fácil ver que la solución correcta es la de la suma (la otra devuelve un resultado negativo sin sentido)

Vamos ahora a la otra situación.

Si $\varphi = -45^\circ$ debe ser $X_L - X_C = -R$

$$\omega_i L - \frac{1}{\omega_i C} = -R$$

$$\frac{\omega_i^2 LC - 1}{\omega_i C} = -R$$

$$\omega_i^2 LC + \omega_i RC - 1 = 0$$

$$\omega_i = \frac{-RC \pm \sqrt{(RC)^2 + 4LC}}{2LC}$$
(42)

Nuevamente la solución correcta es la que corresponde al signo más.

Notamos que la primera respuesta (ω_s) está por encima de ω_r (s es por superior) y la segunda (ω_i) está por debajo (i es por inferior). La diferencia $\omega_s - \omega_i = \Delta\omega$ se llama ancho de banda del circuito y su verdadera relevancia será analizada más adelante, por ahora fue sólo un juego algebraico.

Dejemos por un rato estas manipulaciones que no son inútiles pero ya nos cansaron un poco. Vamos a un tema importante.

11.6. Calculando la potencia

Cuando calculamos la potencia consumida (o entregada) en un circuito de corriente continua nos bastaba multiplicar la caída de tensión sobre un componente por la corriente que circulaba por dicho componente. Como ambos valores no cambiaban a lo largo del tiempo obteníamos un valor constante.

Ya mencionamos anteriormente que en circuitos de corriente alterna tenemos señales que varían con el tiempo. Vamos a desarrollar despacio el caso general.

Consideremos el caso en que un generador $V_g(t)=V_0\cos(\omega t)$ está conectado a un circuito por el que circula una corriente $I(t)=I_0\cos(\omega t+\varphi)$. El producto de ambas cantidades lo denominamos potencia instantánea.

$$P_{inst}(t)=V_g(t) I(t)=V_0\cos(\omega t) I_0\cos(\omega t+\varphi)$$

Desarrollemos el producto recordando que $\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)$

$$P_{inst}(t)=V_0I_0\cos(\omega t)\left[\cos(\omega t)\cos(\varphi)-\sin(\omega t)\sin(\varphi)\right]$$

$$P_{inst}(t)=V_0I_0\left[\cos^2(\omega t)\cos(\varphi)-\cos(\omega t)\sin(\omega t)\sin(\varphi)\right]$$

$$P_{inst}(t)=\frac{V_0I_0}{2}\left\{\left[1+\cos(2\omega t)\right]\cos(\varphi)-\sin(2\omega t)\sin(\varphi)\right\}$$

$$P_{inst}(t)=\frac{V_0}{\sqrt{2}}\frac{I_0}{\sqrt{2}}\left\{\left[1+\cos(2\omega t)\right]\cos(\varphi)-\sin(2\omega t)\sin(\varphi)\right\} \quad (43)$$

$$P_{inst}(t)=\left[V_{ef}I_{ef}\cos(\varphi)\right]\left[1+\cos(2\omega t)\right]-\left[V_{ef}I_{ef}\sin(\varphi)\right]\sin(2\omega t)$$

$$P_{inst}(t)=P\left[1+\cos(2\omega t)\right]-Q\sin(2\omega t)$$

$$P=V_{ef}I_{ef}\cos(\varphi); Q=V_{ef}I_{ef}\sin(\varphi)$$

Esta ecuación nos dice que la potencia instantánea es la suma de un término que es siempre positivo, el que vale $[1+\cos(2\omega t)]$, con uno de valor medio nulo, el que vale $\sin(2\omega t)$. El primer sumando es idéntico al que encontramos cuando estudiamos el comportamiento de una resistencia, es decir que representa una transferencia de energía del generador al circuito. El segundo sumando, que tiene valor medio nulo, semeja lo que obtuvimos cuando estudiamos la respuesta de un capacitor o una inductancia; la energía va y viene mostrando el carácter conservativo de estos elementos. La constante P recibe el nombre de potencia activa o media y, repetimos, representa energía que viaja del generador al circuito. La constante Q se denomina potencia reactiva. Si bien P y Q se obtienen multiplicando una tensión por una corriente, sus significados son distintos. P representa trabajo genuino realizado y por eso la medimos en Watts. Por el contrario, Q no representa un trabajo realizado. Para distinguir esta situación las unidades de Q se dan en Volt-Amper y, para mayor detalle, se las adjetiva como “reactivos”. La abreviatura es VAR (Volt-Amper-Reactivo)

En la siguiente figura representamos los diferentes términos

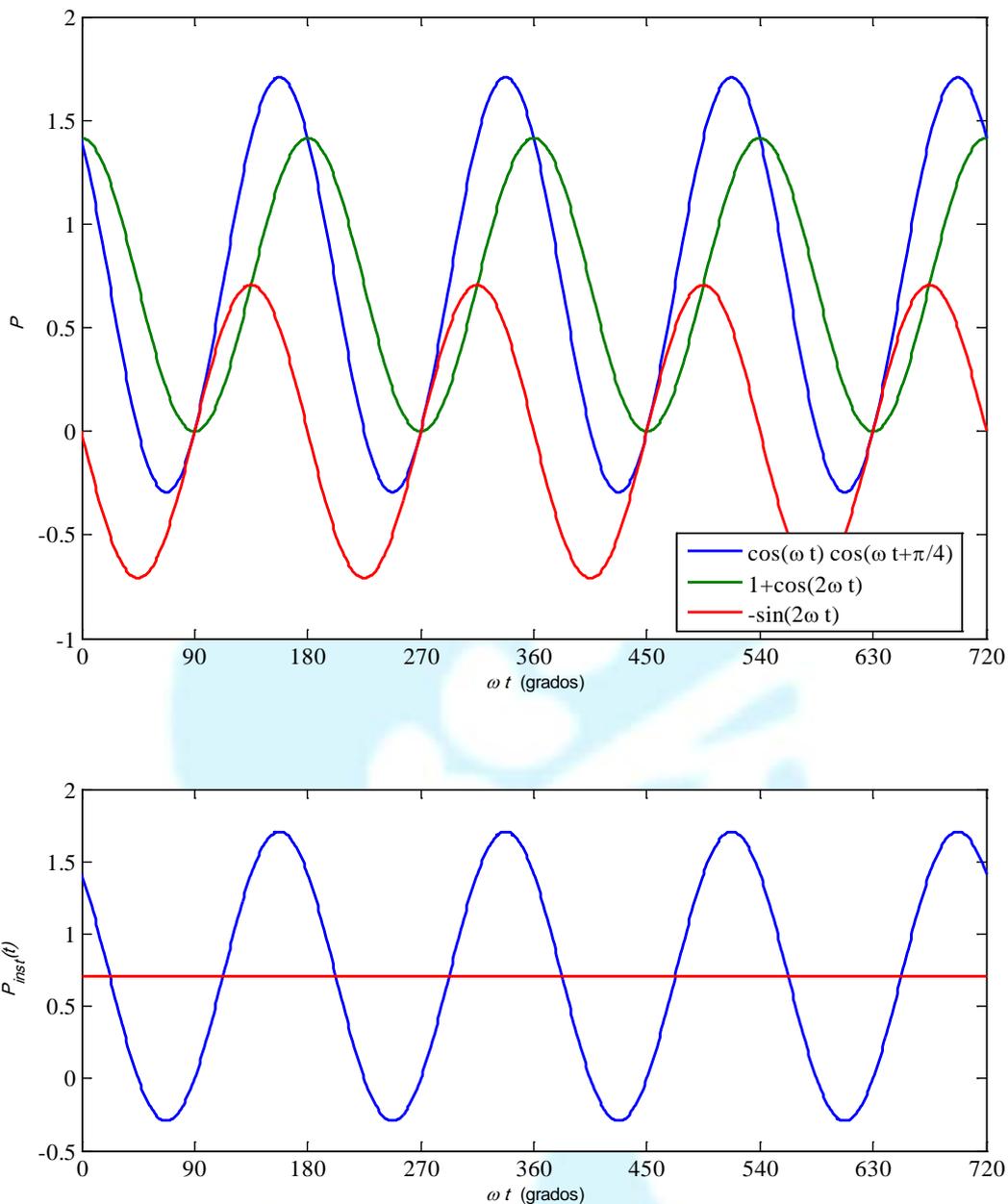


Figura 17. Potencia instantánea para $V_{ef} = 1 \text{ V}$, $I_{ef} = 1 \text{ A}$ y $\varphi = 45^\circ$

Como hemos realizado anteriormente, buscaremos el valor medio de esta última expresión. Al resultado lo denominamos potencia media o activa y la representamos como P sin agregados.

Pero el valor medio es muy simple de calcular. Se reduce al término constante de la Ec.(43) porque la integral del término variable con el tiempo a lo largo de un período es cero.

Obtenemos así:

$$P = V_{ef} I_{ef} \cos(\varphi) \quad (45)$$

Llegamos a un resultado no intuitivo. Todos habríamos jurado que, a la vista de lo desarrollado más arriba, el resultado sería $V_{ef} I_{ef}$ pero el factor $\cos(\varphi)$ nos trae consecuencias importantes.

Repasemos los tres casos elementales del principio para ver la consistencia.

Si sólo tenemos una resistencia el ángulo de desfase φ es nulo y tenemos $P=V_{ef} I_{ef}$ (bien).

Si conectamos una inductancia ($\varphi=90^\circ$) o un capacitor ($\varphi=-90^\circ$) resulta $\cos(\varphi)=0$ y $P=0$ (bien).

La (45) es entonces consistente con lo hallado anteriormente para los casos simples.

El último renglón de la Ec.(43) “invita” a dibujar un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es el producto $V_{ef} I_{ef}$. Vamos a hacerlo, pero notando el signo menos que precede a Q en la penúltima ecuación de la Ec.(43). Lo llamaremos triángulo de potencias.

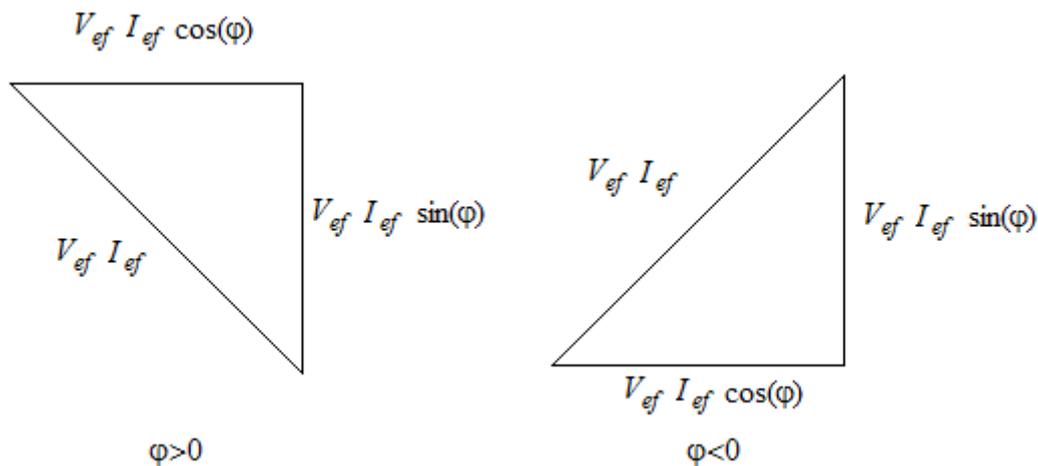


Figura 18. Triángulo de potencias para los dos signos de φ

Desafortunadamente el signo menos del penúltimo renglón de la Ec.(43) nos pone a los triángulos “patas para arriba”.

La hipotenusa, de largo $V_{ef} I_{ef}$, recibe el nombre de potencia aparente S . Los catetos son los valores P y Q ya mencionados.

La potencia aparente es precisamente lo que “parece” que el generador está entregando, pero solamente la parte P es trabajo efectivamente transferido del generador al circuito. Ya dijimos que Q representa energía que va y viene entre el generador y el circuito.

Las unidades de la potencia aparente son Volt-Ampere y, para mejor comprensión, se los suele adjetivar “aparentes”.

Es fácil notar que $\cos(\varphi)$ es la fracción de la potencia aparente que es trabajo entregado al circuito. Dicho valor, $\cos(\varphi)$, es denominado factor de potencia. Dado que coseno es una función par es imposible, dado un valor del mismo, decidir si el argumento φ es positivo o negativo. Por eso se suele agregar la expresión “en adelante” o “capacitivo” cuando $\varphi > 0$ o bien “en retraso” o “inductivo” cuando $\varphi < 0$.

La existencia de Q parece en principio inofensiva pero no es así. A primera vista no nos preocupamos porque pensamos que al tratarse de energía que va y viene no perdemos nada. Esto no es cierto porque los cables no son perfectos y, en cada ida y vuelta, tenemos pérdidas innecesarias de energía. Por otra parte el sistema debe ser dimensionado para entregar la potencia aparente pero sólo utilizamos una fracción. Esto es desventajoso desde el punto de vista económico.

Resulta entonces conveniente tratar de mantener el factor de potencia en valores elevados (obviamente siempre inferiores a la unidad). Incidentalmente, cuando $\varphi = 0$ tenemos el mejor factor de potencia, pero esta condición se da cuando el circuito es una resistencia pura o cuando el mismo se encuentre en resonancia.

Para un mejor aprovechamiento del equipamiento, las empresas proveedoras del servicio eléctrico “preman” o “castigan” a través de la tarifa los consumos con factor de potencia “bueno” o “malo”. El valor umbral que discrimina depende de la política del momento.

Por ejemplo, Edenor toma una cota inferior del factor de potencia de 0.85. Para valores inferiores aplica una tarifa creciente con la disminución del factor de potencia.

Esta facturación dependiente del factor de potencia no se aplica al consumo hogareño. Una vivienda familiar paga por la integral de la potencia activa extendida al período de facturación que suele ser bimestral.

11.7. La potencia en el circuito RLC serie

Apliquemos lo recién desarrollado al circuito RLC que describimos unos párrafos atrás.

Con la definición de potencia activa y la respuesta del circuito (40) tenemos:

$$P = V_{ef} I_{ef} \cos(\varphi) = V_{ef} \frac{V_{ef}}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} \quad (46)$$

$$P = \frac{V_{ef}^2}{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2} R$$

Podemos notar que la máxima potencia activa ocurre en resonancia y vale $P_r = V_{ef}^2 / R$ (la r es por resonancia). Fuera de resonancia el valor de P es menor.

Grafiquemos P/P_r para los mismos valores de las figuras 15 y 16.

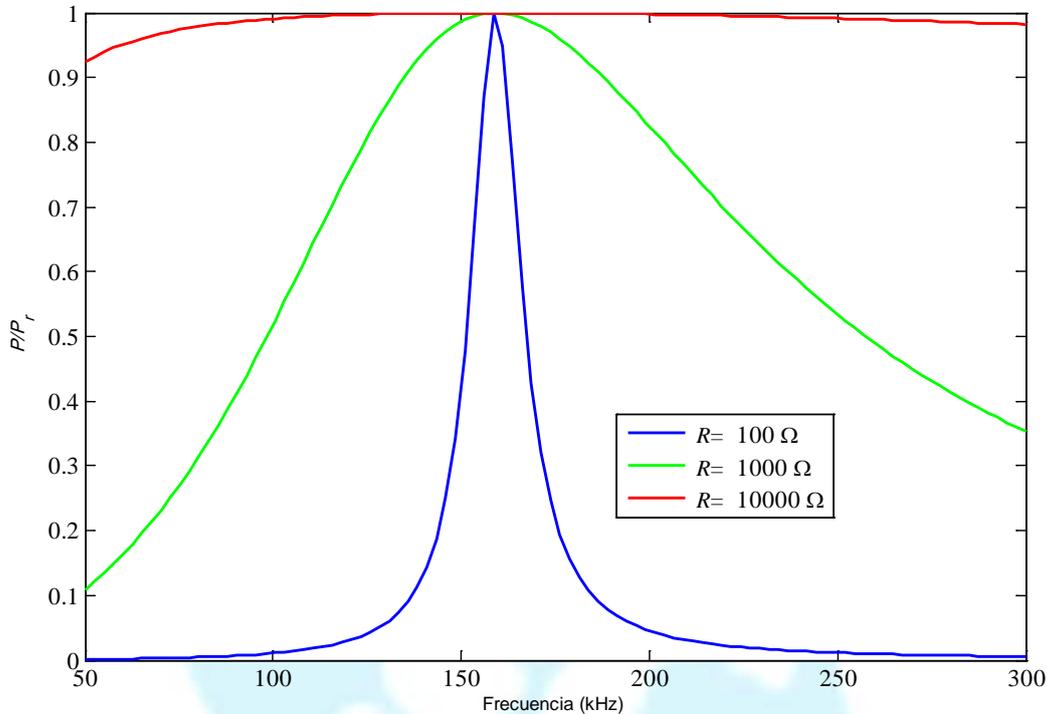


Figura 19. Potencia activa normalizada vs frecuencia

Como anticipamos la máxima potencia activa se da a la frecuencia de resonancia y para otros valores de frecuencia disminuye. Puede observarse que cuanto menor es la resistencia más rápido disminuye la potencia activa al apartarnos de la resonancia.

Anteriormente calculamos las pulsaciones ω_s y ω_i a las cuales el ángulo de desfase entre tensión y corriente era de -45° y 45° respectivamente. Estos valores se obtenían cuando $R = |\omega L - 1/\omega C|$, lo que nos lleva a:

$$P(\omega_s, \omega_i) = \frac{V_{ef}^2}{2R^2} R = \frac{V_{ef}^2}{2R} = \frac{P_r}{2} \quad (47)$$

Quiere decir que a las pulsaciones ω_s y ω_i la potencia activa es la mitad de la que tenemos en resonancia. Por eso se los llama puntos de media potencia. La zona entre ω_s y ω_i se caracteriza por tener una potencia activa entre el 50 y el 100% de la obtenible en resonancia.

En la figura 19 podemos obtener gráficamente los puntos para los que $P/P_r=0.5$. Notamos que para la curva de 10000Ω el cambio no llega a 0.5; las pulsaciones ω_s y ω_i están fuera del rango graficado. La diferencia $\omega_s - \omega_i$ es denominada ancho de banda $\Delta\omega$ del circuito

y nos dice cuánto nos podemos apartar de la resonancia y tener aún una potencia activa superior al 50% de la máxima.

11.8. Ejemplos más elaborados

Por razones históricas en el curso de Física II se decidió que era conveniente no ir más allá del circuito RLC serie y dejar otros para materias más avanzadas.

Creemos que es una lástima no usar un poco más todo el material que construimos así que vamos a dar otros ejemplos fuera de lo exigible pero que sirven para comprender mejor la metodología y no quedarnos encerrados en un único circuito.

11.8.1. El fantasma del circuito paralelo

Rompiendo con la tradición que asegura que el análisis de un circuito con componentes en paralelo es imposible de comprender, vamos a tratar uno.

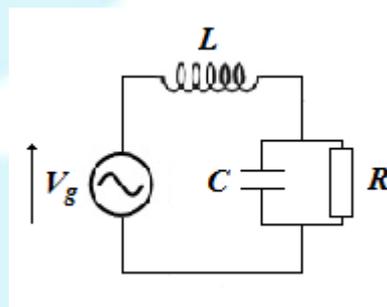


Figura 20. Un circuito con componentes en paralelo.

Consideraremos que el generador es la alimentación domiciliar de nuestro país (220 V, 50 Hz) y además $L= 1$ H, $R= 300 \Omega$ y $C= 20 \mu\text{F}$.

Con los valores anteriores obtenemos $X_L= 314 \Omega$ y $X_C=159 \Omega$. Notamos que R y X_C están conectadas en paralelo, con lo que obtenemos un valor equivalente:

$$\frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{-jX_C}} = \frac{1}{\frac{1}{300\Omega} + \frac{1}{-j159\Omega}} = (65.8 - j124.1)\Omega$$

Ahora notamos que el paralelo de R con X_C está en serie con X_L con lo que obtenemos una impedancia total:

$$Z = j314\Omega + (65.8 - j124.1)\Omega = (65.8 + j190)\Omega = 201 / 70.1^\circ \Omega$$

Con estos valores calculamos una corriente eficaz $I_{ef} = 220 \text{ V} / 201 \Omega = 1.095 \text{ A}$ y un ángulo de fase $\varphi = -70.1^\circ$ (atraso)

Esta es la corriente que circula por el generador y por L . Si deseamos saber cuánto circula por R y por C escribimos:

$$I_L = I_R + I_C \text{ (la suma de corrientes en un nodo es nula)}$$

$$I_R R = -jX_C I_C \text{ (la caídas de tensión en bornes de } R \text{ y } C \text{ son iguales)}$$

De la primera despejamos cualquiera de las incógnitas y reemplazamos en la segunda:

$$I_L - I_R = I_C$$

$$I_R R = -jX_C (I_L - I_R); I_R (R - jX_C) = -jX_C I_L; I_R = -jX_C I_L / (R - jX_C)$$

$$I_R = 159 \angle -90^\circ \Omega * 1.095 \angle -70.1^\circ \text{ A} / (300 - j159) \Omega = 159 \angle -90^\circ \Omega * 1.095 \angle -70.1^\circ \text{ A} / 339.5 \angle -27.9^\circ \Omega$$

$$I_R = 0.51 \angle -132.2^\circ \text{ A}; I_C = I_L - I_R = 0.96 \angle -42.9^\circ \text{ A}$$

Pasemos al tema potencias. La potencia aparente es: $S = 220 \text{ V} * 1.095 \text{ A} = 240.9 \text{ VA}$. La potencia activa es: $P = 220 \text{ V} * 1.095 \text{ A} * \cos(-70.1^\circ) = 78.94 \text{ W}$. La potencia reactiva correspondiente es: $Q = -220 \text{ V} * 1.095 \text{ A} * \sin(-70.1^\circ) = 227.6 \text{ VAR}$ inductivos (el signo menos de Q viene de la ec (43)).

11.8.2. Acoplamiento magnético. El transformador.

El transformador (<https://en.wikipedia.org/wiki/Transformer>) es una pieza crucial de la distribución de energía eléctrica y, posiblemente, haya sido una de las dos “armas” que determinaron la victoria de los sistemas de corriente alterna por sobre los de continua (la otra quizás sea el motor trifásico: https://en.wikipedia.org/wiki/Induction_motor).

El transformador está basado en un viejo amigo: el núcleo toroidal con dos arrollamientos llamados primario (conectado al generador) y secundario (conectado a la carga).

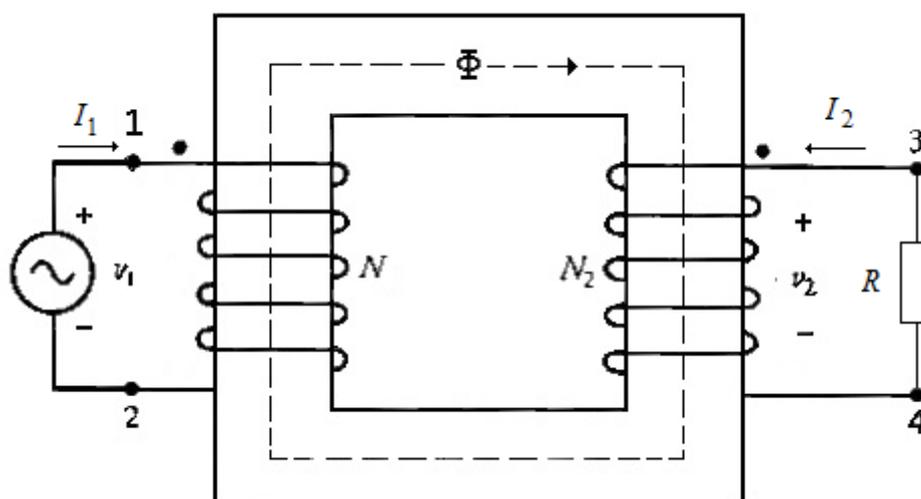


Figura 21. Transformador con carga resistiva.

Si suponemos que las corrientes que circulan por los arrollamientos tienen dependencia temporal sinusoidal, así también será el campo B y el flujo Φ , es decir:

$$B=B_0 \cos(\omega t) \text{ y } \Phi= \Phi_0 \cos(\omega t) \quad (48)$$

Las fuerzas electromotrices inducidas en los bornes del primario (V_1) y secundario (V_2) serán proporcionales a la derivada del flujo y al número de vueltas de cada arrollamiento (no le prestamos atención al signo menos de la ley de Faraday ni al de derivar coseno):

$$V_1=N_1 \Phi_0 \omega \cos(\omega t); \quad V_2=N_2 \Phi_0 \omega \cos(\omega t)$$

$$V_1/ V_2= N_1/ N_2 \quad (49)$$

Esta relación nos da la clave del funcionamiento del transformador, podemos pasar de un valor V_1 a otro V_2 ajustando la relación de vueltas de los arrollamientos. Esto brinda una flexibilidad muy valiosa. El cociente N_1/ N_2 se denomina relación de transformación. El transformador es simple, robusto y sin piezas móviles. Tiene gran rendimiento y es de bajo costo. Sistemas similares en corriente continua son más costosos y no están tan difundidos.

La clave del funcionamiento del transformador está en el acoplamiento magnético entre primario y secundario, representado por el coeficiente de inductancia mutua M .

Analicemos primero el circuito de la figura 21 en el dominio temporal para luego hacerlo en nuestro dominio auxiliar complejo.

Las direcciones de las corrientes I_1 e I_2 son arbitrarias pero, a tomarlas entrantes a los bornes homólogos, nos facilitan el estudio del signo del término de acoplamiento magnético (coincide con el de L).

$$V_s(t) - L_1 \frac{dI_1(t)}{dt} - M \frac{dI_2(t)}{dt} = 0 \quad (\text{Primario})$$

$$-L_2 \frac{dI_2(t)}{dt} - M \frac{dI_1(t)}{dt} - RI_2(t) = 0 \quad (\text{Secundario})$$
(50)

La Ec.(50) es un sistema de ecuaciones diferenciales acopladas. No muy agradable de resolver.

Tomemos el camino que involucra trabajar en el dominio complejo. Como ya hicimos antes tomamos un “generador auxiliar” $V = V_0 e^{j\omega t}$ y corrientes $I_1 = I_{01} e^{j(\omega t + \phi_1)}$ e

$$I_2 = I_{02} e^{j(\omega t + \phi_2)}$$

Obtenemos:

$$V_0 e^{j\omega t} - j\omega L_1 I_{01} e^{j(\omega t + \phi_1)} - j\omega M I_{02} e^{j(\omega t + \phi_2)} = 0$$

$$-j\omega L_2 I_{02} e^{j(\omega t + \phi_2)} - j\omega M I_{01} e^{j(\omega t + \phi_1)} - R I_{02} e^{j(\omega t + \phi_2)} = 0$$
(51)

Como en otras ocasiones cancelamos el término común $e^{j\omega t}$.

$$\begin{aligned} j\omega L_1 I_{01} e^{j\varphi_1} + j\omega M I_{02} e^{j\varphi_2} &= V_0 \\ + j\omega L_2 I_{02} e^{j\varphi_2} + j\omega M I_{01} e^{j\varphi_1} + R I_{02} e^{j\varphi_2} &= 0 \end{aligned} \quad (52)$$

Si bien el método de eliminación de Gauss es válido con coeficientes complejos, el desarrollo manual es pesado, por lo que recurrimos al viejo recurso de despejar una variable en una de las ecuaciones y lo reemplazamos en la otra.

Arbitrariamente despejamos el término de la corriente del secundario en la segunda ecuación:

$$I_{02} e^{j\varphi_2} = -\frac{j\omega M I_{01} e^{j\varphi_1}}{R + j\omega L_2} \quad (53)$$

Y reemplazamos en la primera

$$\begin{aligned} j\omega L_1 I_{01} e^{j\varphi_1} + j\omega M \left(-\frac{j\omega M I_{01} e^{j\varphi_1}}{R + j\omega L_2} \right) &= V_0 \\ I_{01} e^{j\varphi_1} \left(j\omega L_1 + \frac{\omega^2 M^2}{R + j\omega L_2} \right) &= V_0 \\ I_{01} e^{j\varphi_1} \left(\frac{j\omega L_1 (R + j\omega L_2) + \omega^2 M^2}{R + j\omega L_2} \right) &= V_0 \\ I_{01} e^{j\varphi_1} \left(\frac{j\omega L_1 R - \omega^2 L_1 L_2 + \omega^2 M^2}{R + j\omega L_2} \right) &= V_0 \end{aligned} \quad (54)$$

Recordemos la relación entre el coeficiente de inductancia mutua M , el de acoplamiento magnético k y los de autoinductancia L :

$$M = k \sqrt{L_1 L_2} \quad (55)$$

Si tenemos acoplamiento perfecto ($k=1$) la (54) se transforma en:

$$\begin{aligned} I_{01} e^{j\varphi_1} \left(\frac{j\omega L_1 R}{R + j\omega L_2} \right) &= V_0 \\ I_{01} e^{j\varphi_1} &= V_0 \frac{R + j\omega L_2}{j\omega L_1 R} \end{aligned} \quad (56)$$

Reemplazamos en (53)

$$\begin{aligned} I_{02} e^{j\varphi_2} &= -\frac{j\omega M}{R + j\omega L_2} V_0 \frac{R + j\omega L_2}{j\omega L_1 R} \\ I_{02} e^{j\varphi_2} &= -\frac{V_0}{R} \frac{M}{L_1} = -\frac{V_0}{R} \frac{\sqrt{L_1 L_2}}{L_1} = -\frac{V_0}{R} \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} \end{aligned} \quad (57)$$

De la (57) obtenemos $\varphi_2 = 180^\circ$ e $I_{02} = \frac{V_0}{R} \sqrt{\frac{L_2}{L_1}}$

Si recordamos que los coeficientes de autoinductancia son proporcionales al cuadrado del número de vueltas de los arrollamientos damos el paso final:

$$I_{02} e^{j\varphi_2} = -\frac{V_0}{R} \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} = -\frac{V_0}{R} \sqrt{\infty \frac{N_2^2}{N_1^2}} = -\frac{V_0}{R} \frac{N_2}{N_1} \quad (58)$$

La (58) nos dice que la fuerza electro-motriz del generador ha quedado escalada por la inversa de la relación de transformación.

Pensemos que tenemos una alimentación de 240 V como sucede en algunos países de Europa (usamos 240 V porque es un número con más divisores) y queremos encender lámparas dicroicas de 12 V. Necesitamos una relación de transformación $N_1/N_2 = 240 \text{ V} / 12 \text{ V} = 20$.

Es obvio que hay infinitos cocientes N_1/N_2 que dan un determinado valor. La elección de los valores del numerador y denominador queda para materias superiores.

$$P_{inst}(t) = \frac{V_0 I_0}{2} [\cos(\varphi) + \cos(2\omega t + \varphi)]$$

$$P_{inst}(t) = \frac{V_0}{\sqrt{2}} \frac{I_0}{\sqrt{2}} [\cos(\varphi) + \cos(2\omega t + \varphi)]$$

$$P_{inst}(t) = V_{ef} I_{ef} [\cos(\varphi) + \cos(2\omega t + \varphi)]$$